2019-2020 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI FEN-EDEB. FAK. MAT. BÖL. MAT 101 ANALİZ I FİNAL SINAVI SORULARI

ADI-SOYADI:
NUMARASI:
İMZASI: Cevap Anahtarı

31.12.2019

Uyarılar:

- Sınav süresi 120 dakikadır.
- İlk 30 dakika sınav salonunu terk etmeyiniz.
- Sınav süresince mobil telefonlarınızı kapalı tutunuz.
- Ders notlarını içeren herhangi bir aracın sınav süresince kullanılması yasaktır.
- Sınavda 8 soru olup, her soru 15 puan değerindedir, toplam 120 puandır.
- Her soruyu altındaki boşluğa çözünüz.
- Cevaplamaya istediğiniz sorudan başlayabilirsiniz.
- Tam puan almak için yaptığınız işlemleri sınav kağıdında belirtmeniz gerekmektedir.
- Başarılar…

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR, Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

Soru No	Puan
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
Toplam	

1) a) (Doğru/Yanlış) İki irrasayonel sayının toplamı da bir irrasyonel sayıdır. Y

b) (Doğru/Yanlış) Bir dizinin bir alt dizisi yakınsak ise kendiside yakınsaktır. Y

c) (Doğru/Yanlış) Bir fonksiyonun bir noktada limiti birden fazla olabilir. Y

d) (Boşluğu doldurunuz) $f(x)=\arcsin(x^2-4)$ fonksiyonunun tanım kümesi $[-\sqrt{5},-\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3},\sqrt{5}]$ dir.

e) (Boşluğu doldurunuz) $\left(-1,\frac{7}{3}\right]\cup\{3\}$ kümesinin yığılma noktaları kümesi $[-1,7/3]$ dir.

2) $\varnothing\neq X\subset\mathbb{R}$ ve $f,g:X\to\mathbb{R}$ iki fonksiyon olsun. $a\in X'$ olmak üzere $\lim\limits_{x\to a}f(x)=K$ ve $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$ ise $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=K+L$ olduğunu gösteriniz.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=K \Rightarrow \forall\varepsilon>0$ için $0<|x-a|<\delta_1$ old. da $|f(x)-K|<\varepsilon$ o.ş. $\exists\,\delta_1(\varepsilon)>0$ vardır.

$\lim\limits_{x\to a} g(x)=L \Rightarrow \forall\varepsilon>0$ için $0<|x-a|<\delta_2$ old. da $|g(x)-L|<\varepsilon$ o.ş. $\exists\,\delta_2(\varepsilon)>0$ vardır.

Buradan $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ alınırsa $0<|x-a|<\delta$ old. da

$$|(f+g)(x)-(K+L)| = |f(x)+g(x)-K-L| \leq |f(x)-K|+|g(x)-L| < 2\varepsilon$$

olur. Yani $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=K+L$ dir.

3) $A=\{x\in\mathbb{R}:[\![x+[\![x+1+[\![x+2]\!]]\!]]\!]=-3\}$ kümesinin varsa supremum, infimum, minimum ve maksimum değerlerini bulunuz.

$[\![x]\!]\in\mathbb{Z}$ ve $[\![x+M]\!]=[\![x]\!]+M$, $M\in\mathbb{Z}$ kullanılırsa

$-3=[\![x+[\![x+1+[\![x+2]\!]]\!]]\!]=[\![x]\!]+[\![x+1]\!]+[\![x+2]\!]$

$=3[\![x]\!]+3 \Rightarrow [\![x]\!]=-2 \Rightarrow x\in[-2,-1)$ olur.

$A=[-2,-1)$ olmasıyla $\sup A=-1$, $\max A$ yok,

$\inf A=\min A=-2$ dir.

4) Aşağıdaki limitleri gösteriniz.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n^2)}{n+1}=0$ $\forall\varepsilon>0$ için $\forall n\geq n_0$ old. da $\left|\dfrac{\sqrt[3]{n^2}.\sin n^2}{n+1}\right|=$

$=\dfrac{n^{2/3}.|\sin n^2|}{n+1}<\dfrac{n^{2/3}}{n}=\dfrac{1}{n^{1/3}}<\dfrac{1}{n_0^{1/3}}<\varepsilon \Leftrightarrow n_0=\left[\!\!\left[\dfrac{1}{\varepsilon^3}\right]\!\!\right]+1$

alınmalıdır.

(b) $\lim\limits_{x\to1^+}[\![x]\!]-2=-1$ $\forall\varepsilon>0$ için $1<x<1+\delta$ olduğunda $|[\![x]\!]-2+1|<\varepsilon$

o.ş. $\exists\,\delta:\delta(\varepsilon)>0$ varmıdır. $\delta<1$ olsun. O zaman $\forall\varepsilon>0$ için

$1<x<2$ olup $|[\![x]\!]-1|=0<\varepsilon$ olduğundan her $\varepsilon>0$

için $\delta=\min\{\varepsilon,1\}$ alınabilir.

5) (a) $f(x)=\operatorname{sgn}(\ln [\![x]\!])$ fonksiyonunun tanım kümesini bulunuz.

Çözüm: $D_f = \{x \in \mathbb{R} : [\![x]\!] > 0\} = [1, \infty)$

$[\![x]\!] > 0$ olması için gerekli ve yeterli şart $[\![x]\!] = 1, 2, 3, \dots$ olması, yani $x \geq 1$ olmasıdır.

(b) $\operatorname{arccot} h\, x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, $|x|>1$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: $y = \operatorname{arccoth} x \iff x = \coth y \iff x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}$

$\iff e^y + e^{-y} = xe^y - xe^{-y} \iff e^y - xe^y = -e^{-y} - xe^{-y}$

$\iff e^y(1-x) = -e^{-y}(1+x) \iff e^{2y}(1-x) = -(1+x)$

$\iff e^{2y} = \dfrac{1+x}{x-1} \iff 2y = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right) \iff y = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

6) (a_n) dizisi $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 6$ indirgeme formülü ile veriliyor.

(i) (a_n) dizisinin 8 ile üstten sınırlı ve artan olduğunu gösteriniz.

(ii) (a_n) dizisinin limitini bulunuz.

Çözüm: i) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n < 8$ olduğunu tümevarım ile gösterelim.

$n=1$ için $a_1 = 1 < 8$ dir.

$n=k$ için doğru olsun, yani $a_k < 8$ olsun.

$n=k+1$ için $a_{k+1} = \frac{1}{4}a_k + 6 < \frac{1}{4}\cdot 8 + 6 = 8$ olup $a_{k+1} < 8$ dir.

O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n < 8$ dir.

(a_n) artandır: $a_n < 8$ olduğundan $\frac{3}{4}a_n < \frac{3}{4}\cdot 8 = 6$ dır. Böylece

$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 6 > \frac{1}{4}a_n + \frac{3}{4}a_n = a_n$ olup $a_{n+1} > a_n$ dir. O halde (a_n) dizisi artandır.

ii) (a_n) dizisi üstten sınırlı ve artan olduğundan yakınsaktır, yani $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ vardır.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}a_n + 6\right) = \frac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty} a_n + 6 \Rightarrow L = \frac{1}{4}L + 6$

$\Rightarrow \frac{3}{4}L = 6$

$\Rightarrow L = 8$ bulunur.

7) Aşağıdaki limitleri hesaplayınız.

(a) $\lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{5x}{\sqrt{x^2+4}}$ (b) $\lim\limits_{t\to 1} \dfrac{1-\cos^2(t-1)}{t-1}$

Çözüm: a) $f(x)=\dfrac{5x}{\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{\frac{5x}{|x|}}{\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2}}} = \dfrac{\frac{5x}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}}$

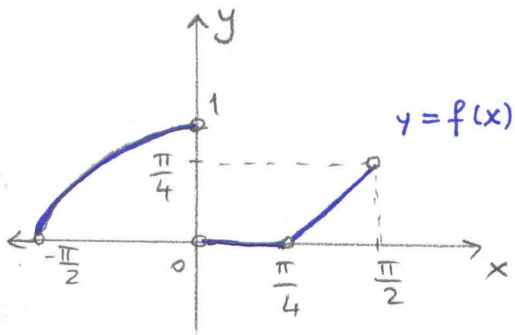
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{5x}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty} 5}{\sqrt{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{x^2}\right)}} = \frac{5}{1} = 5$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{5x}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-5}{\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}} = \frac{-5}{1} = -5$$

b) $$\lim_{t\to 1} \frac{1-\cos^2(t-1)}{t-1} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{t\to 1} \frac{\sin^2(t-1)}{t-1} = \lim_{t\to 1} \frac{\sin(t-1)}{t-1} \cdot \sin(t-1)$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{\sin(t-1)}{t-1} \cdot \lim_{t\to 1} \sin(t-1) = 1.0 = 0$$

8) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \\ [\![\sin x]\!], & 0 < x < \dfrac{\pi}{4} \\ \left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)\operatorname{sgn}\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right), & \dfrac{\pi}{4} < x < \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ ile tanımlı f fonksiyonunun grafiğini çiziniz. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ve $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} f(x)$ limitlerinin varlığını araştırınız.



Çözüm: $0<x<\frac{\pi}{4}$ için $0<\sin x<\frac{\sqrt{2}}{2}$ olup $[\![\sin x]\!]=0$ dır.

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{2}$ için $0<x-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$ olup $\operatorname{sgn}(x-\frac{\pi}{4})=1$ dir.

O halde f fonksiyonunu

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\pi/2 < x < 0 \\ 0, & 0 < x < \frac{\pi}{4} \\ x-\frac{\pi}{4}, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

şeklinde yazabiliriz.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 0 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \cos x = 1 \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^+} x-\frac{\pi}{4} = 0 \\ \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}^-} 0 = 0 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ ve $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^-} f(x) = 0$ olduğundan f fonksiyonunun $x=0$ noktasında limiti yoktur, $x=\frac{\pi}{4}$ noktasında limiti vardır ve değeri 0 dır.